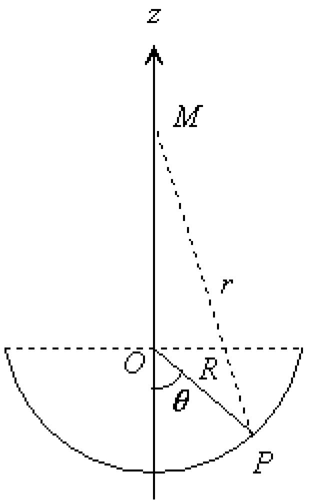
EM2.2. Potentiel et champ créés par une demi-sphère chargée en surface.

1. Recherche du potentiel.



On considère un élément de surface de la demi sphère centré en un point P. Le potentiel électrostatique créé en un point M de l'axe Oz a pour expression :

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{r}$$

Par intégration sur l'angle azimutal et en exprimant r :

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \mathrm{d}S}{PM} = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2\sin^2\theta + \left(z + R\cos\theta\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}}$$

$$V = \int_0^{\pi/2}\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}}$$

Or :

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}}2zR\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2} = -zR\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}}$$

On peut alors exprimer :

$$\frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}} = -\frac{\mathrm{d}\left(R^2 + 2zR\cos\theta + z^2\right)^{1/2}}{zR}$$

Le potentiel en M s'écrit alors :

$$V=-\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sigma R^{2}}{2\varepsilon_{0}}\frac{\mathrm{d}\left(R^{2}+2zR\cos\theta+z^{2}\right)^{1/2}}{zR}$$

$$V=-\frac{\sigma R}{2z\varepsilon_{0}}\left(\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}-\left(R+z\right)\right)$$

$$\boxed{V=\frac{\sigma R}{2z\varepsilon_{0}}\left(\left(R+z\right)-\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}\right)}$$

2. Champ électrostatique en *M*.

On a : $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$

$$E_{z}(M)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dz}}=-\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}\left(-\frac{1}{z^{2}}\left(z+R-\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}\left(R^{2}+z^{2}\right)^{-1/2}2z\right)\right)$$

$$E_{z}(M)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}\left(\frac{R}{z^{2}}-\frac{\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}}{z^{2}}+\frac{1}{\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}}\right)$$

3. Potentiel et champ en *O*.

On écrit le potentiel sous la forme :

$$V=\frac{\sigma R}{2z\varepsilon_{0}}\left(\left(R+z\right)-\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}\right)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}\left(1+\frac{R}{z}-\frac{\left(R^{2}+z^{2}\right)^{1/2}}{z}\right)$$

$$V=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}\left(1+\frac{R}{z}-\frac{R}{z}\left(1+\frac{z^{2}}{R^{2}}\right)^{1/2}\right)$$

On calcule la limite de V dans le cas où z tend vers 0 :

$$V(O)=\lim_{z\to 0}V(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}\left(1+\frac{R}{z}-\frac{R}{z}\left(1+\frac{1}{2}\frac{z^{2}}{R^{2}}\right)\right)$$

$$V(O)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{0}}$$

Pour le champ électrique, on procède de la même manière :

$$E_{z}(O)=\lim_{z\to 0}\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{o}}\left(\frac{R}{z^{2}}-R\frac{\left(1+\frac{z^{2}}{R^{2}}\right)^{1/2}}{z^{2}}+\frac{1}{R}\right)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_{o}}\left(-\frac{R}{z^{2}}\left(\frac{z^{2}}{2R^{2}}\right)+\frac{1}{R}\right)$$

$$\boxed{E_{z}(O)=\frac{\sigma}{4\varepsilon_{o}}}$$

www.kholaweb.com